

УДК 517.968: 519.612:004.021

Е. Н. Акимова, В.В. Васин, П.С. Мартышко,
В.Е. Мисилов, А.Ф. Миниахметова

Методы решения обратной задачи гравиметрии о нахождении поверхностей раздела сред на многопроцессорных вычислительных системах¹

АННОТАЦИЯ. Для решения трехмерной структурной обратной задачи гравиметрии о нахождении поверхностей раздела сред постоянной плотности рассматриваются итерационные методы типа Ньютона и Гаусса–Ньютона для модели двухслойной среды и линеаризованные методы градиентного типа с весовыми множителями для решения задачи в многослойной среде. На основе этих методов для решения задачи гравиметрии для моделей двухслойной и трехслойной среды разработаны эффективные параллельные алгоритмы решения обратных задач, численно реализованные на многопроцессорных системах различного типа: многопроцессорном комплексе МВС-ИММ, многоядерном процессоре Intel и графических процессорах NVIDIA, входящими в состав суперкомпьютера «Уран». Проведено исследование эффективности и оптимизация параллельных алгоритмов.

Ключевые слова и фразы: обратная задача гравиметрии, итерационные методы, параллельные алгоритмы, многопроцессорные вычислительные системы.

Введение

Важнейшей задачей при исследовании структуры земной коры является обратная задача гравиметрии о нахождении поверхностей раздела сред постоянной плотности по известным скачкам плотности и гравитационному полю, измеренному на некоторой площади земной поверхности [1]. Задача гравиметрии является некорректно поставленной и описывается нелинейным интегральным уравнением Фредгольма первого рода. При разработке методов решения задачи используются идеи итеративной регуляризации [2-3]. После дискретизации задача сводится к системам нелинейных уравнений большой размерности (до нескольких сотен тысяч). Необходимость повышения точности результатов решения задач, в частности, использование более мелких сеток, существенно увеличивает время вычислений.

¹ Работа выполнена при поддержке УрО РАН в рамках программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 18 (проект 12-П-15-2019).

Одним из путей уменьшения времени расчетов и повышения эффективности решения геофизических задач является распараллеливание алгоритмов и использование многопроцессорных вычислительных систем (МВС). В Институте математики и механики УрО РАН (г. Екатеринбург) установлены суперкомпьютеры МВС-ИММ и «Уран», которые успешно используются при решении прикладных задач. Суперкомпьютер «Уран» включает в себя гибридный вычислительный кластер на основе видеоускорителей NVIDIA Tesla и многоядерных CPU.

В данной работе рассматриваются итерационные методы типа Ньютона и Гаусса–Ньютона и их модифицированные варианты для решения структурной обратной задачи гравиметрии о нахождении поверхностей раздела сред для модели двухслойной среды и линеаризованные итерационные методы градиентного типа (наискорейшего спуска и минимальной ошибки) с весовыми множителями для решения задачи в многослойной среде. На основе этих методов разработаны эффективные параллельные алгоритмы, численно реализованные на многопроцессорных вычислительных системах различного типа.

1. Обратная задача гравиметрии о нахождении поверхностей раздела сред

1.1. Постановка обратной задачи гравиметрии о нахождении поверхности раздела для модели двухслойной среды

Рассматривается трехмерная структурная обратная задача гравиметрии о восстановлении поверхности раздела между средами по известному скачку плотности и гравитационному полю, измеренному на некоторой площади земной поверхности.

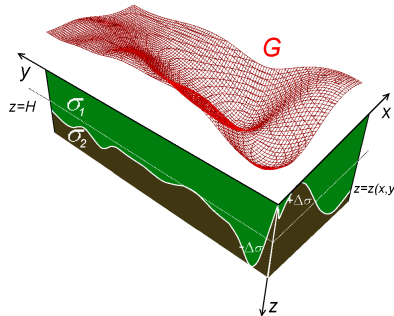


Рис. 1. Модель двухслойной среды

В предположении, что нижнее полупространство состоит из двух слоев постоянной плотности, разделенных искомой поверхностью S (рис. 1), и гравитационная аномалия создана отклонением искомой поверхности S от горизонтальной плоскости $z = H$, функция $z = z(x, y)$, описывающая искомую поверхность раздела, удовлетворяет нелинейному двумерному интегральному уравнению Фредгольма первого рода

$$A[z] \equiv f \Delta \sigma \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2(x', y') \right]^{1/2}} - \frac{1}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + H^2 \right]^{1/2}} \right\} dx' dy' = \Delta g(x, y, 0), \quad (1)$$

где f – гравитационная постоянная, $\Delta \sigma$ – скачок плотности на границе раздела сред, $\Delta g(x, y, 0)$ – аномальное гравитационное поле, $z = H$ – асимптотическая плоскость для данной границы раздела, т.е.

$$\lim_{|x|, |y| \rightarrow \infty} |z(x, y) - H| = 0.$$

Предварительная обработка гравитационных данных, связанная с выделением аномального поля из общих гравитационных данных, выполняется по методике, предложенной в работе [4].

Обратная задача гравиметрии является существенно некорректной задачей, решение которой обладает сильной чувствительностью к погрешности правой части, полученной в результате измерений и предварительной обработки геофизических данных. Поэтому при ее решении используются методы итеративной регуляризации.

После дискретизации уравнения (1) на сетке $n = M \times N$, где задана $\Delta g(x, y)$, и аппроксимации интегрального оператора по квадратурным формулам имеем систему нелинейных уравнений

$$A_n[z] = F_n. \quad (2)$$

1.2. Постановка обратной задачи гравиметрии о нахождении поверхностей раздела в многослойной среде

Предполагается, что нижнее полупространство состоит из нескольких слоев постоянной плотности, разделенных искомыми поверхностями S_l , $l = 1, \dots, L$, где L – число границ раздела (рис. 2). Гравитационный эффект от такого полупространства равен сумме гравитационных эффектов от всех поверхностей раздела.

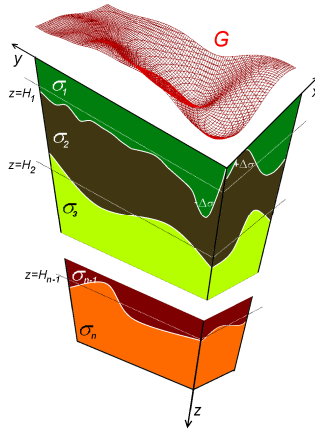


Рис. 2. Модель многослойной среды

Пусть поверхности раздела задаются уравнениями $z_l = z_l(x, y)$, скачки плотности на них равны $\Delta\sigma_l$, поверхности имеют горизонтальные асимптотические плоскости $z_l = H_l$, т. е.

$\lim_{|x|, |y| \rightarrow \infty} |z_l(x, y) - H_l| = 0$. Поле от суперпозиции границ равно [1]

$$A(z) \equiv f \sum_{l=1}^L \Delta\sigma_l \iint_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z_l^2(x, y)}} - \right.$$

$$-\frac{1}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + H^2 \right]^{1/2}} \Bigg\} dx dy = \Delta g(x', y', 0), \quad (3)$$

где f – гравитационная постоянная, L – число границ раздела,

$$\Delta g(x, y) = \sum_{l=1}^L \Delta g_l.$$

После дискретизации уравнения (3) на сетке $n = M \times N$, где задана правая часть $\Delta g(x, y)$, и аппроксимации интегрального оператора $A(z)$ по квадратурным формулам имеем вектор правой части $F(x, y)$ размерности $M \times N$, результирующий вектор решения $z(x, y) = [z_1(x, y), \dots, z_L(x, y)]$ размерности $L \times M \times N$, матрицу производной оператора $A'(z^k)^T$ размерности $L \times M^2 \times N^2$ и систему нелинейных уравнений

$$\tilde{A}_n[z] = \tilde{F}_n. \quad (4)$$

Задача является недоопределенной, так как по заданной функции $\Delta g(x, y)$ необходимо найти несколько неизвестных функций $z_l = z_l(x, y)$, что влечет неединственность решения.

2. Итерационные методы решения обратной задачи гравиметрии

2.1. Методы решения задачи для двухслойной среды

Для решения системы нелинейных уравнений (2) используется методы Ньютона и Гаусса–Ньютона в регуляризованном варианте:

- итеративно регуляризованный метод Ньютона [2]

$$z^{k+1} = z^k - \left[A'_n(z^k) + \alpha I \right]^{-1} \left[A_n(z^k) + \alpha z^k - F_n \right]; \quad (5)$$

- метод Гаусса–Ньютона [2]

$$z^{k+1} = z^k - \left[\left(A'_n(z^k) \right)^T A'_n(z^k) + \alpha I \right]^{-1} \left(A'_n(z^k) \right)^T \left[A_n(z^k) + \alpha z^k - F_n \right]; \quad (6)$$

либо модифицированные аналоги методов Ньютона и Гаусса–Ньютона, когда производная в обрабатываемом операторе вычисляется в фиксированной точке $z^0 = \text{const}$ [5], [6]:

$$z^{k+1} = z^k - \left[A'_n(z^0) + \bar{\alpha} I \right]^{-1} \left[A_n(z^k) + \alpha z^k - F_n \right]; \quad (5a)$$

$$z^{k+1} = z^k - \left[\left(A'_n(z^0) \right)^T A'_n(z^0) + \bar{\alpha} I \right]^{-1} \left(A'_n(z^k) \right)^T \left[A_n(z^k) + \alpha z^k - F_n \right], \quad (6a)$$

а также

$$z^{k+1} = z^k - \left[\left(A'_n(z^0) \right)^T A'_n(z^0) + \bar{\alpha} I \right]^{-1} \left(A'_n(z^0) \right)^T \left[A_n(z^k) + \alpha z^k - F_n \right], \quad (6b)$$

когда производная вычисляется в фиксированной точке не только в обрабатываемом операторе, но и в градиенте тихоновского функционала.

Здесь $A_n(z^k)$ и F_n – конечномерные аппроксимации интегрального оператора и правой части в уравнении (1), $A'_n(z^k)$ – производная оператора A в точке z^k , I – единичный оператор, α , $\bar{\alpha}$ – положительные параметры регуляризации.

В отличие от (5), (6), управляющие параметры α , $\bar{\alpha}$ в процессах (5a), (6a), (6b) в общем случае различны. Это открывает новые возможности для обоснования сильной сходимости, получения оценок погрешностей и построения эффективных итерационных процессов.

Нахождение очередного приближения z^{k+1} методов (5), (6) и (5a), (6a), (6b) сводится к решению СЛАУ

$$A_n^k z^{k+1} = F_n^k, \quad (7)$$

где $A_n^k = A_n'(z^k) + \alpha I$ – плохо обусловленная несимметричная заполненная $n \times n$ матрица для метода (5) либо симметричная положительно-определенная $n \times n$ матрица $\tilde{A}_n^k = (A_n'(z^0))^T A_n'(z^0) + \bar{\alpha} I$ для методов (6а), (6б). В случае (5), (5а) вектор F_n^k размерности n имеет вид $F_n^k = A_n^k z^k - [A_n(z^k) + \alpha z^k - F_n]$.

Условием останова итерационных процессов (5), (6) и (5а), (6а), (6б) является выполнение условия $\|A_n z - F_n\| / \|F_n\| < \varepsilon$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$.

На каждом шаге методов Ньютона и Гаусса–Ньютона и их модифицированных вариантов для нахождения очередного приближения z^{k+1} с помощью решения СЛАУ (7) могут быть использованы итерационные методы градиентного типа: простой итерации, минимальных невязок, минимальной ошибки, наискорейшего спуска или сопряженных градиентов в регуляризованном варианте.

2.2. Методы решения задачи в многослойной среде

Для решения задачи гравиметрии в многослойной среде предлагается использовать линейризованные итерационные методы градиентного типа с весовыми множителями γ_i , вычисляемыми для каждой компоненты z_i ($i = 1, \dots, L \times M \times N$) [7]:

- линейризованный метод наискорейшего спуска (ЛМНС)

$$z_i^{k+1} = z_i^k - \gamma_i \frac{\|S(z^k)\|^2}{\|A'(z^k)S(z^k)\|^2} S_i(z^k), \tag{8}$$

$$S(z^k) = A'(z^k)^T (A(z^k) - F);$$

- линейризованный метод минимальной ошибки (ЛММО)

$$z_i^{k+1} = z_i^k - \gamma_i \frac{\|A(z^k) - F\|^2}{\|S(z^k)\|^2} S_i(z^k), \quad (9)$$

где $\gamma_i \in [0, 1]$, $z_i - i$ - компонента результирующего вектора $z(x, y)$; k – номер итерации.

Весовые множители γ_i , зависящие от номера компоненты вектора z^k , выбираются специальным образом путем нормировки выделенных аномальных полей из общего гравитационного поля $\Delta g(x, y)$ для каждой границы раздела.

В качестве начального приближения используются горизонтальные асимптотические плоскости $z_l^0 = H_l$ ($l = 1, \dots, L$).

Условием останова итерационных процессов (8)–(9) является выполнение условия $\|A(z) - F\| / \|F\| < \varepsilon$ при достаточно малом ε , где

$$F = \sum_{l=1}^L F_l. \text{ Заметим, что линейаризованные градиентные методы (8) и (9)}$$

с постоянными множителями γ ранее были использованы при решении задачи гравиметрии для модели двухслойной среды [8].

3. Распараллеливание и численная реализация методов решения задачи на многопроцессорных системах

Параллельные алгоритмы решения структурной обратной задачи гравиметрии о восстановлении поверхности раздела для модели двухслойной среды на основе методов градиентного типа, итеративно регуляризованных методов Ньютона и Гаусса–Ньютона и их модифицированных вариантов, а также параллельные алгоритмы решения структурной обратной задачи гравиметрии о восстановлении поверхностей раздела для моделей трех- и четырехслойной среды на основе линейаризованных методов градиентного типа с весовыми множителями численно реализованы на многопроцессорном комплексе кластерного типа с распределенной памятью МВС-ИММ, многоядерном процессоре Intel и графических процессорах NVIDIA, входящими в состав суперкомпьютера «Уран» (ИММ УрО РАН). Параллельные алгоритмы реализованы на МВС-ИММ и «Уран» с помощью технологии MPI, на графических процессорах NVIDIA – с помощью технологии CUDA и библиотеки

CUBLAS, на многоядерном процессоре – с помощью технологии OpenMP.

При реализации на МВС и многоядерном процессоре распараллеливание итерационных методов градиентного типа, методов типа Ньютона и Гаусса–Ньютона основано на разбиении матрицы A СЛАУ горизонтальными полосами на m блоков, а вектора решения z и вектора правой части b СЛАУ на m частей так, что $n = m \times L$, где n – размерность системы уравнений, m – число процессоров, L – число строк матрицы в блоке. На текущей итерации каждый из m процессоров вычисляет свою часть вектора решения. В случае умножения матрицы A на вектор z каждый из m процессоров умножает свою часть строк матрицы A на вектор z . В случае матричного умножения $A^T A$ каждый из m процессоров умножает свою часть строк транспонированной матрицы A^T на всю матрицу A . Host-процессор (ведущий) отвечает за пересылку данных и также вычисляет свою часть вектора решения.

С целью оптимизации выполнения векторно-матричных операций проведено распараллеливание и векторизация циклов с помощью технологии OpenMP и средств компилятора Intel .

При реализации на графических процессорах NVIDIA линейризованных итерационных методов наискорейшего спуска и минимальной ошибки проведена оптимизация работы с памятью. Для сеток довольно большой размерности, когда данные могут не входить в память видеокарты, наилучшим по быстродействию оказывается метод вычисления элементов матрицы A' «на лету», т.е. вычисление значения элемента матрицы происходит в момент обращения к этому элементу без сохранения его в память видеокарты. Это позволяет существенно снизить количество обращений к памяти видеокарты и заметно ускорить процесс вычислений по сравнению с хранением матрицы A' в памяти Host-процессора и порционной загрузкой в видеоускоритель для вычислений.

Параллельные алгоритмы решения структурных обратных задач гравиметрии о восстановлении поверхностей раздела сред встроены в разработанную систему удаленных вычислений «Специализированный Веб-портал решения задач на многопроцессорных вычислительных системах» [9], установленный в отделе некорректных задач анализа и приложений Института математики и механики УрО РАН. В настоящее время на Веб-портале предусмотрен запуск программ для решения задач гравиметрии на МВС-ИММ и суперкомпьютере «Уран», включающем в себя вычислительный кластер на основе видеоускорителей NVIDIA Tesla.

Специализированный Веб-портал предоставляет возможность пользователю через Веб-интерфейс выбирать тип многопроцессорного вычислителя с указанием числа процессорных узлов (MBC, NVIDIA Tesla, Multi-Core CPU), вид задачи и метод ее решения, загружать входные данные, получать выходные данные и графическое изображение результатов решения с помощью графических пакетов Surfer и gnuplot. Для каждой задачи выводится время счета.

4. Результаты численных экспериментов

Эффективность модифицированного метода ньютоновского типа (5а) для обратной задачи гравиметрии в случае двухслойной среды была продемонстрирована в [10]. В данной работе приводятся результаты численных экспериментов на основе методов (8), (9) при решении задачи гравиметрии для трехслойной среды, разделенной двумя искомыми поверхностями S_1 и S_2 с модельными данными на площади S , имеющей размеры 90×100 км². Суммарное гравитационное поле на площади S находилось путем решения прямой задачи гравиметрии по формуле (3) с известными точными решениями:

$$z_1(x, y) = 5 - 2e^{-(x/10-3.5)^2 - (y/10-2.5)^2} - 3e^{-(x/10-5.5)^2 - (y/10-4.5)^2};$$

$$z_2(x, y) = 20 - 10e^{-(x/25-2.2)^2 - (y/25-1.75)^2}.$$

Расстояния до асимптотических плоскостей принимались равными $H_1 = 5$ км и $H_2 = 20$ км. Соответствующие скачки плотности принимались равными $\Delta\sigma_1 = 0.25$ г/см³ и $\Delta\sigma_2 = 0.3$ г/см³. Шаги сетки составили $\Delta x = \Delta y = 1.0$ км.

После дискретизации уравнения (3) на сетке имеем вектор правой части $F(x, y)$ размерности 9000, результирующий вектор решения $z(x, y) = [z_1(x, y), z_2(x, y)]$ размерности 18000, матрицу производной оператора $A'(z^k)^T$ размерности 18000×9000 и систему нелинейных уравнений вида (4).

Для решения задачи использовались параллельные итерационные линейризованные методы наискорейшего спуска и минимальной ошибки с весовыми множителями. Задача решалась на MBC-ИММ с помощью технологии MPI и вычислительном кластере NVIDIA Tesla с применением технологии OpenMP и технологии CUDA.

На рис. 3 изображены приближенные решения – восстановленные поверхности раздела.

При решении задачи методами ЛМНС и ЛММО относительные нормы невязок $\mathcal{E} = \|A(z) - F\| / \|F\|$ по сравнению с начальной нормой невязки $\mathcal{E}_0 = 1$ уменьшились на два порядка и составили $\mathcal{E}_{ЛМНС} \approx 0.011$ и $\mathcal{E}_{ЛММО} \approx 0.013$ (100 итераций). Относительные погрешности $\delta_i = \|z_i^T - z_i^{np}\| / \|z_i^T\| \cdot 100\%$ для решений $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$ составили 2.8 % и 2.3 %, соответственно.

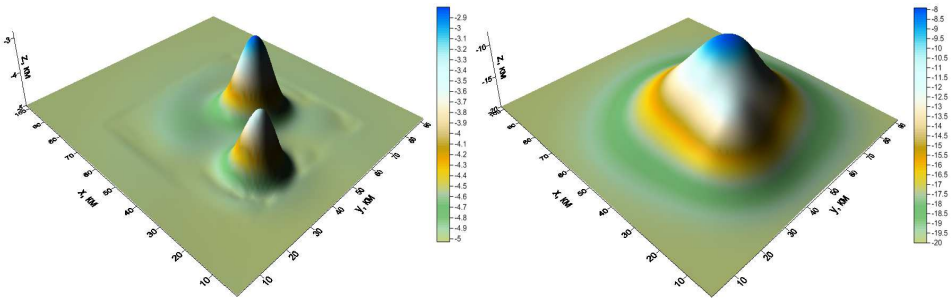


Рис. 3. Приближенные решения

В табл. 1 приводятся времена решения нелинейной задачи гравиметрии для трехслойной среды линеаризованным методом минимальной ошибки на графических процессорах NVIDIA Tesla и многоядерном процессоре Intel Xeon с оптимизацией (векторизацией циклов) и без оптимизации выполнения векторно-матричных операций. Оптимизация средствами компилятора Intel в три раза сокращает время счета. Наименьшим временем решения задачи является время счета на видеоускорителе NVIDIA Tesla, которое в 5 раз меньше времени решения задачи на 6 ядрах процессора Intel Xeon.

Для сравнения времени счета решения задачи введем коэффициенты ускорения и эффективности параллельных алгоритмов

$$S_m = T_1 / T_m, \quad E_m = S_m / m, \quad S = T_1 / T_2,$$

где T_m – время выполнения параллельного алгоритма на МВС-ИММ либо на многоядерном процессоре с числом процессоров или ядер m ($m > 1$), T_1 – время выполнения последовательного алгоритма на одном процессоре либо на одном ядре, T_2 – время решения задачи на видеоускорителе. T_m представляет собой совокупность чистого времени счета и накладных расходов.

Таблица 1

Решение задачи методом ЛММО

Вычислитель	T_m , мин.	S_m (S)	E_m
Intel Xeon (1 ядро) без опт	18.57	–	–
Intel Xeon (2 ядра) без опт	9.31	1.99	0.99
Intel Xeon (3 ядра) без опт	6.40	2.90	0.97
Intel Xeon (4 ядра) без опт	4.80	3.87	0.97
Intel Xeon (5 ядер) без опт	3.92	4.74	0.95
Intel Xeon (6 ядер) без опт	3.37	5.51	0.92
Intel Xeon (1 ядро) с опт	5.11	–	–
Intel Xeon (2 ядра) с опт	2.69	1.91	0.95
Intel Xeon (3 ядра) с опт	2.00	2.55	0.85
Intel Xeon (4 ядра) с опт	1.53	3.44	0.84
Intel Xeon (5 ядер) с опт	1.35	3.79	0.75
Intel Xeon (6 ядер) с опт	1.19	4.29	0.71
NVIDIA Tesla (448 ядер)	0.25	20.4	–

Заключение

На основе итеративно регуляризованных методов типа Ньютона, Гаусса–Ньютона и линейризованных методов градиентного типа для решения структурной обратной задачи гравиметрии разработаны параллельные алгоритмы, численно реализованные на многопроцессорных вычислительных системах различного типа: многопроцессорном комплексе МВС-ИММ, графических процессорах NVIDIA Tesla и многоядерном процессоре Intel Xeon с высокой эффективностью распараллеливания с использованием новых вычислительных технологий. Проведена оптимизация параллельных алгоритмов. Решена модельная задача для трехслойной среды. Результаты вычислений показывают, что использование линейризованных итерационных методов градиентного типа при решении структурных обратных задач гравиметрии для двухслойной и трехслойной среды позволяет получать корректные решения. Применение параллельных алгоритмов при решении обратных задач гравиметрии на многопроцессорных вычислительных системах существенно уменьшает время счета.

Список литературы

- [1] Мартышко П. С., Ладовский И. В., Цидаев А. Г. Построение региональных геофизических моделей на основе комплексной интерпретации гравитационных и сейсмических данных // Физика земли. 2010. Т. 46. № 11. С. 23–35.
- [2] Bakushinsky A., Goncharky A. Ill-Posed Problems: Theory and Applications. London: Kluwer Akad. Publ., 1994.
- [3] Васин В. В., Еремин И. И. Операторы и итерационные процессы фейеровского типа. Теория и приложения. Екатеринбург: УрО РАН. 2005.
- [4] Мартышко П. С., Пруткин И. Л. Технология разделения источников гравитационного поля по глубине // Геофизический журнал. 2003. Т. 25. № 3. С. 159–168.
- [5] Васин В. В. Метод Левенберга–Марквардта для аппроксимации решений нерегулярных операторных уравнений // Автоматика и телемеханика. 1993. № 3. С. 28–37.
- [6] Васин В. В. Модифицированные процессы ньютоновского типа, порождающие фейеровские аппроксимации регуляризованных решений нелинейных уравнений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19. № 2. С. 85–97.
- [7] Акимова Е. Н., Мартышко П. С., Мисиллов В. Е. Алгоритмы решения структурной задачи гравиметрии в многослойной среде // ДАН. 2013. Т. 453. № 6. С. 1-5.

- [8] Vasin V. V., Skorik G. G. Iterative processes of gradient type with applications to gravimetry and magnetometry inverse problems // J. Inverse and Ill-Posed Problems. 2010. Vol. 1, no. 5. P. 387–399.
- [9] Акимова Е. Н., Белоусов Д. В., Мисилов В. Е. Алгоритмы решения обратных геофизических задач на многопроцессорных вычислительных системах // Сибирский журнал вычислительной математики. 2013. Т. 6. № 2. С. 107–121.
- [10] Васин В. В., Акимова Е. Н., Миниахметова А. Ф. Итерационные алгоритмы ньютоновского типа и их приложения к обратной задаче гравиметрии // Вестник Южно-Уральского гос. ун-та. Серия «Мат. моделирование и программирование». 2013. Т.6. № 3. С. 26-37.

Об авторах:

Акимова Елена Николаевна, доктор физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник отдела некорректных задач анализа и приложений Института математики и механики УрО РАН, проф. кафедры Выч. методов и уравнений мат. физики Уральского федерального университета.

e-mail: aen15@yandex.ru

Васин Владимир Васильевич, член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник отдела некорректных задач анализа и приложений Института математики и механики УрО РАН, проф. кафедры Вычислительной математики Уральского федерального университета.

e-mail: vasin@imm.uran.ru

Мартышко Петр Сергеевич, член-корреспондент РАН, директор Института геофизики УрО РАН, зав. кафедрой Выч. методов и уравнений мат. физики Уральского федерального университета.

e-mail: pmart3@mail.ru

Мисилов Владимир Евгеньевич, аспирант Института математики и механики УрО РАН, ст. программист отдела некорректных задач анализа и приложений Института математики и механики УрО РАН.

e-mail: out.mrscreg@gmail.com

Миниахметова Алия Фиргатовна, аспирант Уральского федерального университета, программист отдела некорректных задач анализа и приложений Института математики и механики УрО РАН.

e-mail: afinapal@gmail.com