Высокоскоростные параллельные вычисления в решении задачи минимизации теплового потока при входе аппарата в атмосферу*

В.В. Дикусар, Н.Н. Оленёв

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына Российской академии наук

Трудоемкая задача расчета оптимальной траектории входящего в атмосферу аппарата с учетом ограничений на перегрузку, перегрев и дальность полета может быть ускорена за счет естественного параллелизма, содержащегося в постановке задачи. Интервал возможной дальности полета рассчитывается в соответствии с решением задачи оптимального управления на максимальную и минимальную дальность полета в виде краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Первый параллелизм связан в расчетом задачи минимизации теплового потока по сетке из заданного интервала дальности полета. Второй параллелизм связан численным расчетом значений матрицы Якоби на каждом шаге расчета траектории. В результате использования двух видов параллелизма удается за приемлемое время получить требуемые результаты расчетов.

1. Введение

Рассмотрим задачу оптимального управления, которая состоит в минимизации конвективного и радиационного теплового потока при входе космического летательного аппарата (КЛА) в атмосферу. При этом должны выполняться определенные ограничения, наложенные на динамический режим полета.

Во-первых, нужно учесть те ограничения на динамический режим полета, что относятся к аэродинамическим силам, действующим на КЛА. Если угол атаки КЛА постоянный, а распределение коэффициента давления c_p на поверхности КЛА не изменяется или почти не изменяется в процессе полета, то ограничения $X < X_{доп}$ и $Y < Y_{доп}$, налагаемые на аэродинамические силы по условиям прочности конструкции КЛА, сводятся к ограничению на скоростной напор:

$$\frac{pV^2}{2} = q \le q_{доп} = \min\left(\frac{X_{доп}}{c_x S}, \frac{\mathrm{Y}_{\text{доп}}}{\mathrm{c_y S}}\right)$$

Здесь значения величин c_x и c_y практически постоянны, а масса КЛА играет второстепенную роль. Поскольку статистические аэродинамические нагрузки уравновешиваются распределенными силами инерции, пропорциональными массовой плотности КЛА, то при пропорциональном изменении этой плотности условия нагрузки на конструкцию КЛА не изменяются, и некоторую роль может сыграть лишь перераспределение массовой плотности.

В случае, когда угол атаки КЛА регулируется, а условия обтекания претерпевают существенные изменения в процессе полета, прочностные ограничения могут иметь достаточно сложный характер и определяться неравенствами типа

$$F\,(q, \alpha, M) \le 0.$$

Если на борту КЛА находится экипаж, важно обеспечить выполнение ограничений на значения перегрузки для членов экипажа. Полная перегрузка n определяется отношением аэродинамической силы к весу КЛА на Земле.

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты №№ 11-07-00201, 12-01-00916, 13-07-01020), ПФИ Президиума РАН № 15, ПФИ ОМН РАН №3.

$$n = \frac{R}{mg_3},$$

где R – аэродинамическая сила.

Важно учесть направление перегрузки. Если угол атаки КЛА почти не меняется, а условия обтекания неизменны, то направление действия перегрузки определено, и условие $n \le n_{доп}$ дает

$$\frac{q}{m} \le \left(\frac{q}{m}\right)_{доп}$$

Принцип максимума сводит задачу оптимального управления к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений [1]. Применение метода Ньютона при решении краевой задачи включает трудоемкую процедуру численного расчета матрицы Якоби. Этот численный расчет естественно распараллеливается в силу независимости частных производных. Таким образом полученный параллельный алгоритм применяется для решения задачи оптимального управления, возникающей при расчете минимального конвективного и радиационного потока, возникающего при входа КЛА в атмосферу. В численной реализации параллельного алгоритма расчета матрицы Якоби на языке C++ используется интерфейс передачи сообщений MPI [2-3]. Расчеты проводились на вычислительных ресурсах МСЦ РАН.

2. Описание динамического и теплового режимов при входе в атмосферу

Рассмотрим задачу выбора угла атаки аппарата, тормозящегося в атмосфере при минимизации суммарного теплового потока с учетом ограничений на величину полной перегрузки скоростного напора. Решение указанных задач определяет маневренные возможности аппарата [4].

Суммарное количество тепла

$$Q = \int_0^T CV^3 \rho^{1/2} dt. \qquad (1)$$

Требуется выбрать управление $C_y(t)$, доставляющее минимум $q(T)$ L(t) (1) при следующих ограничениях:

$$n_{\sum} = \sqrt{C_x^2 + C_y^2}\, q \frac{S}{G} \le N, \qquad q = \frac{\rho V^2}{2}, \qquad G = mg \qquad (2)$$

$$C_y^{\min} \le C_y \le C_y^{\max}, \qquad C_x = C_{xo} + kC_y^2, \qquad (3)$$

$$\rho = \rho_0 e^{-\beta H}, \qquad g = g_0 \frac{R^2}{(R+H)^2}, \qquad V^\bullet = -C_x q \frac{S}{m} - g \sin\theta, \qquad (4)$$

$$\theta^\bullet = C_y q \frac{S}{mV} + \left(\frac{V}{R+H} - \frac{g}{V}\right)\cos\theta, \qquad H^\bullet = V \sin\theta, \qquad (5)$$

$$L^\bullet = \frac{RV\cos\theta}{R+H}$$

где $n_{\sum}$ - полная перегрузка, q - скоростной напор, ρ - плотность атмосферы, V - скорость аппарата, θ - угол наклона траектории, H - высота полета, G - вес аппарата, m - масса, g_0 - ускорение силы тяжести на поверхности планеты, R - радиус планеты, C_x - коэффициент лобового сопротивления, C_y - коэффициент подъемной силы, S - характерная площадь аппарата, $C_{xo},\ k,\ \rho_0,\ \beta,\ C, C_y^{\min}, C_y^{\max},\ N$ - постоянные величины.
Для системы (1)–(5) заданы начальные условия

$$V(0)=V_0,\quad \theta(0)=\theta_0,\quad H(0)=H_0,\quad L(0)=L_0,\quad Q(0)=0. \qquad (6)$$

Граничные условия имеют вид

$$L(T)=a,\ V(T)=V_1,\quad \theta(T)=\theta_1,\quad H(T)=H_1,\quad T \text{ - не фиксировано.} \qquad (7)$$

где а – параметр.
Заметим, что ограничение (1) выполняется автоматически из условий (2), (3)

2.1. Принцип максимума (регулярный случай)

Пусть спускаемый аппарат приходит из начального состояния (6) в конченое положение оптимальным образом в смысле минимума или максимума дальности в предположении, что на оптимальной траектории выполнено условие регулярности [1, 5].

$$\frac{\partial n_{\sum}}{\partial C_y} \neq 0,\ \ n_{\sum} = N. \qquad (8)$$

В этом случае принцип максимума имеет следующий вид:

$$\Pi = P_\theta \theta^\bullet + P_H H^\bullet + P_V V^\bullet + P_L L^\bullet, \qquad \Pi_1 = \Pi - \lambda(t)\left(n_{\sum} - N\right), \qquad (9)$$

$$P_\theta^\bullet = -\frac{\partial \Pi}{\partial \theta},\quad P_V^\bullet = -\frac{\partial \Pi}{\partial V},\quad P_H^\bullet = -\frac{\partial \Pi}{\partial H},\quad P_L^\bullet = -\frac{\partial \Pi}{\partial L},\quad P_Q^\bullet = -\frac{\partial \Pi}{\partial q}. \qquad (10)$$

Здесь $\lambda(t)$ - множитель Лагранжа, который определяется из условия Блисса [1, 5].
Π - функция Понтрягина, Π_1 - функция Лагранжа.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial C_y} - \lambda(t)\frac{\partial n_{\sum}}{\partial C_y} = 0, \qquad (11)$$

$P_\theta,\ P_V,\ P_H,\ P_L,\ P_Q$ - соответствующие сопряженные переменные. Для ограничения типа неравенств выполнено условие дополняющей нежесткости

$$\lambda(t)\left(n_{\sum} - N\right) = 0. \qquad (12)$$

Так как наша система автономна и на время спуска никаких ограничений не накладывается, то функция Понтрягина тождественно равна нулю, т.е.

$$\Pi\left(P,x,u\right)\equiv 0,\qquad u=C_y,\qquad x=\left(\theta,V,\,H_y,L\right),\qquad P=\left(P_\theta,P_V,P_H,\,P_L,\,P_Q\right)\tag{13}$$

Сопряженная переменная $P_Q\left(T\right)$ нормируется условием

$$P_Q\left(T\right)=-1.\tag{14}$$

Из $\overset{\bullet}{P_Q}=0$ следует $P_Q\left(t\right)\equiv -1$ на всей оптимальной траектории.

Начальные условия для системы (10) неизвестны и являются параметрами задачи. Условия $P_Q\left(t\right)\equiv -1$ и $\Pi\left(P,x,u\right)\equiv 0$ (13) по существу определяют три свободных параметра

$$P_\theta\left(0\right)=C_1,\qquad P_V\left(0\right)=C_2,\qquad P_L\left(0\right)=C_3\tag{15}$$

так как $P_H\left(0\right)$ определяется из условия $\Pi\left(P,x,u\right)\equiv 0$.

В этом случае число контролируемых в конце траектории функций совпадает с числом свободных параметров задачи (1)–(7), (9), (10), поскольку время T не фиксировано и является свободным параметром.

Согласно принципу максимума программа управления выбирается из условия

$$\Pi\to\max_{C_y},\quad \textit{при}\quad Q\left(T\right)\to\min\tag{16}$$

Выпишем ту часть функции Понтрягина (9), которая явно зависит от управления $C_y\left(t\right)$

$$\Pi_0=P_\theta\frac{C_y\rho VS}{2m}-P_V\frac{C_x\rho V^2S}{2m}.\tag{17}$$

Управление $C_y(t)$ может принимать не только концевые значения (3), но так же и промежуточное, которое определяется из условия

$$\frac{\partial\Pi_0}{\partial C_y}=0,\qquad C_y^*=\frac{P_\theta}{2kP_VV}\ ,\qquad C_y^{\min}\le C_y^*\le C_y^{\max}\tag{18}$$

Вычислим теперь три значения Π_0:

$$\Pi_1=\Pi_0\left(C_y^{\min}\right),\qquad \Pi_2=\Pi_0\left(C_y^{\max}\right),\qquad \Pi_3=\Pi_0\left(C_y^*\right)$$

и определим соответствующие минимальные и максимальные величины Π_0

$$\Pi_0^{\min}=\min\left\{\Pi_1,\Pi_2,\Pi_3\right\},\qquad .\tag{19}$$

Соотношения (19) определяют характер оптимального управления для задачи Понтрягина, т.е. при условии $n_{\sum}<N$. Решение поставленной задачи значительно упрощается, если правый конец траектории контролируется условием

$$H\left(T\right)=H_1.\tag{20}$$

В этом случае решение краевой задачи определяется граничными условиями

$$\theta(T) = \theta_1, \qquad V(T) = V_1, \qquad L(T) = a \tag{21}$$

и зависит от трёх произвольных постоянных C_1, C_2 и C_3.

Таким образом, исходная задача сводится к трёхпараметрической краевой задаче (1), (6), (10), (15), (21), а оптимальное управление $C_y(t)$ определяется в каждой точке t согласно принципу максимума (19).

2.2. Учет ограничений на перегрузку

Учет ограничений на перегрузку (2) существенно увеличивает трудности получения решения даже регулярном случае. Первая проблема связана с вычислением множителя Лагранжа $\lambda(t)$ (11). При итеративном поиске оптимальной траектории наблюдается значительный рост множителей Лагранжа при $C_y(t) \to 0$. Указанную трудность можно преодолеть в рамках теории сингулярно-возмущенных систем [1, 5].

Вторая проблема в задачах оптимального управления при наличии ограничений типа неравенств связана с определением геометрии оптимальной траектории или, другими словами, множества активных индексов. Этот вопрос в определенной степени решается для задач, линейных по управлению. При этом исходная задача дискретизуется и затем решается задача линейного программирования большой размерности. Ее решение дает возможность оценить геометрию оптимальной траектории. При этом сужается число возможных альтернатив в характере оптимальной траектории. На базе полученного решения можно построить гипотезу о геометрии оптимальной траектории. Затем оптимальную траекторию можно проверить на оптимальность, используя принцип максимума.

Следует заметить, что при решении задачи линейного программирования также появляются серьезные проблемы вычислительного характера, связанные с некорректностью рассматриваемой задачи.

В поставленной задаче трудность определения геометрии оптимальной траектории связана с определением момента схода с ограничения $n_{\sum} = N$ (2).

Заметим, что суммарная перегрузка $n_{\sum}$ (2) имеет два компоненты n_x и n_y. Первая называется продольной перегрузкой, а вторая — нормальной.

$$n_y = \frac{\rho V^2 S}{2mg_0} C_y, \qquad n_x = \frac{\rho V^2 S}{2mg_0} C_x, \qquad n_{\sum} = \sqrt{n_x^2 + n_y^2}\,. \tag{22}$$

Новое ограничение

$$|n_y| + n_x \le N_1, \qquad |n_y| + n_x - N_1 = \varphi(x,u) \le 0\,. \tag{23}$$

При соответствующем выборе N_1 из справедливости неравенства (23) заведомо будет выполнено стандартное ограничение. Указанный факт следует из неравенства

$$N_1 \ge \left[|n_y| + |n_x|\right] \ge \sqrt{n_x^2 + n_y^2}\,, \tag{24}$$

причем равенство достигается при $C_y = 0$.

Вычислим теперь производную $\varphi(x,u)$ по C_y

$$\frac{\partial\varphi}{\partial C_y}=\frac{\rho V^2 S}{2mg_0}\left[signC_y+2kC_y\right]. \tag{25}$$

В этом случае множитель Лагранжа $\lambda(t)$ для ограничения $\varphi(x,u)\le 0$ (23) определяется по формуле

$$\lambda(t)=\frac{2\left(\frac{P_\theta}{2}-kP_V C_y V\right)g_0}{V\left[signC_y+2kC_y\right]}\ . \tag{26}$$

Краевая задача решалась методом продолжения решений по параметру t [6].

3. Параллельные вычисления

При реализации метода Ньютона решения краевой задачи, к которой сводится представленная выше задача оптимального управления, на каждом шаге расчета требуется трудоемкая процедура расчета матрицы Якоби. Параллельные вычисления в этом расчете реализованы с использованием технологии MPI на языке C++, с использование функций, описанных в [2,3]. В каждый заданный момент времени при движении КЛА расчет каждой частной производной матрицы Якоби происходил параллельно. Применение параллельных вычислений ускорило расчет траекторий, удовлетворяющих принципу оптимальности, на порядок.

Расчет траектории проводился на кластерном суперкомпьютере МСЦ РАН.

4. Заключение

При входе аппарата в атмосферу, как правило, учитывают три основных ограничения: прочностное, ограничение на полную перегрузку и ограничение на нагрев. Указанное ограничение можно свести к задаче полета аппарата на минимум и максимум дальности с учетом ограничений на величину полной перегрузки, а в качестве функционала рассматривается минимум нагрева. При этом дальность в конце полета зависит от параметра. Выбор параметра производится из условия минимума максимального нагрева аппарата. Так как на величину угла атаки наложено ограничение, то отсюда следует оценка на прочностное ограничение.

Краевая задача решалась с использованием параллельного варианта метода Ньютона. Использовалась естественная параллелизация расчета элементов матрицы Якоби для каждого шага траектории КЛА на суперкомпьютере МСЦ РАН.

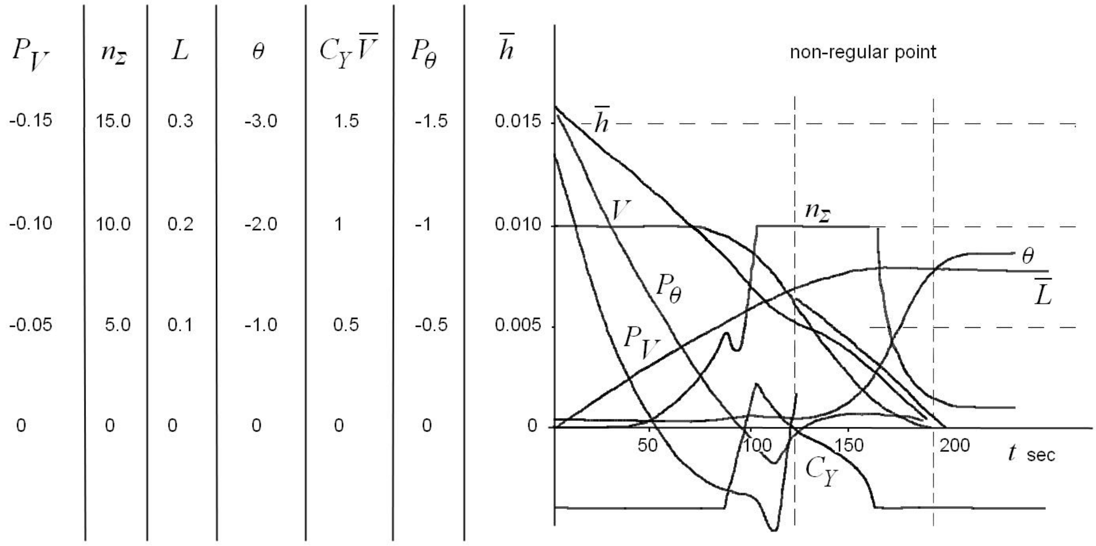

Рис.1 Динамика траектории спуска при наличии нерегулярной точки

Результаты параллельных расчетов на высокопроизводительной вычислительной технике оптимальной траектории спуска аппарата в атмосферу с учетом ограничений на величину полной перегрузки в случае нерегулярного принципа максимума приведены на рис.1. При этом применялась общепринятая в аэродинамике полета нормировка переменных.

Получено четырехкратное ускорение счета матрицы Якоби при расчете на 16 узлах.

Литература

1. Афанасьев А.П., Дикусар В.В., Милютин А.А., Чуканов С.В. Необходимое условие в принципе максимума. — М.: Наука, 1990. 320 с.
2. Оленев Н.Н. Основы параллельного программирования в системе MPI. М.: ВЦ РАН. 2005. 80 с.
3. Долматова А.И., Оленев Н.Н. Параллельные вычисления в моделировании региональной экономики: учебное пособие. – Киров: ПРИП ФГБОУ ВПО «ВятГУ», 2012. – 125 с.
4. Ярошевский В.А. Вход в атмосферу космических летательных аппаратов. — М.: Наука, 1988.
5. Дикусар В.В., Милютин А.А. Количественные и качественные методы в принципе максимума — М.: Наука, 1989.
6. Дикусар В. В, Кошька М, Фигура А. Продолжение решений в прикладных задач оптимального управления. МФТИ. 2001.